Problemas de Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de ITT

Relación 0. Funciones Γ y β. Campos escalares y vectoriales

1. Calcular las siguientes integrales definidas:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \, \cos^3 t \, dt$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t \, \cos^3 t \, dt$ (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 t \, dt$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^5 t \, dt$ (e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3 t \, dt$ (f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \, \cos^4 t \, dt$

(g) $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} \operatorname{sen}^4 t \, \cos^2 t \, dt$ (h) $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \, \cos^3 t \, dt$ (i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t \, \cos^3 t \, dt$

2. Sea $\vec{F} = xz\,\vec{\imath} - y^2\,\vec{\jmath} + 2x^2y\,\vec{k}$. Calcular: $\operatorname{div}(\vec{F})$, $\operatorname{rot}(\vec{F})$.

3. Sea $f = x^2yz^3$. Calcular $\nabla(f)$ y $\Delta(f)$.

4. Hallar un vector normal unitario a la superficie $2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10$ en el punto $P(3, -1, 2)$.

5. Determinar el ángulo que forman las superficies $z = xy$ y $xyz = 1$ en el punto $P(1, 1, 1)$.

Problemas Propuestos

6. Calcular las siguientes integrales definidas:

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^3 t \, dt$ (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^5 t \, dt$ (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t \, \cos^4 t \, dt$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \, \cos^2 t \, dt$ (e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4 t \, \cos^4 t \, dt$ (f) $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \, \cos^4 t \, dt$

(g) $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \, \cos^5 t \, dt$ (h) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \, \cos^5 t \, dt$ (i) $\displaystyle\int_0^{5\pi/2} \operatorname{sen}^3 t \, \cos^3 t \, dt$

7. Sea $\vec{F} = y^2z^2\,\vec{\imath} + z^2x^2\,\vec{\jmath} + x^2y^2\,\vec{k}$. Demostrar que $\operatorname{rot}(\vec{F}) \neq \vec{0}$, pero se tiene que $\vec{F} \cdot \operatorname{rot}(\vec{F}) = 0$. Calcular además $\operatorname{div}(\vec{F})$.

8. Dado $f = 2x^2y - xz^3$, calcular $\nabla(f)$ y $\Delta(f)$.

9. Hallar un vector normal unitario a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ en el punto $P(1, 2, 3)$.

10. Determinar el ángulo que forman las superficies $z = xy + 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ en el punto $P(1, 2, 3)$.

<u>**Soluciones**</u>

6. (a) 0 (b) 0 (c) $3\pi/256$ (d) $\pi/16$ (e) $3\pi/128$ (f) $3\pi/32$ (g) $-8/105$ (h) 0 (i) $1/12$

7. $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 2\left(x^2(y-z), y^2(z-x), z^2(x-y)\right)$ $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$

8. $\nabla(f) = \left(4xy - z^3, 2x^2, -3xz^2\right)$ $\Delta(f) = 4y - 6xz$

9. $1/\sqrt{14}\,(1, 2, 3)$

10. 96.2^0 ó 83.8^0

Problemas de Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de ITT

Relación 1. Integrales de línea

1. Calcular el trabajo realizado por una partícula que se mueve desde el punto $(0,0)$ al $(1,2)$ siguiendo la gráfica de la curva $\vec{\alpha} : [0,1] \longrightarrow \mathrm{I\!R}^2$ dada por $\vec{\alpha}(t) = \left(t^2, 2t\right)$ cuando actúa sobre ella una fuerza $\vec{f}(x,y) = \left(xy, x^2+y^2\right)$.

2. Calcular la integral de línea $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ siendo $\mathcal{C}$ la circunferencia centrada en el origen de radio a.

3. Calcular la integral de línea $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$ siendo $\mathcal{C} \equiv \vec{\alpha} : [0,1] \longrightarrow \mathrm{I\!R}^3;\quad \vec{\alpha}(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$.

4. Calcular el potencial (si existe) de las siguientes formas diferenciales:

   (a) $\left(xy^2+x+1\right)\,\mathrm{d}x + \left(x^2y-2\right)\,\mathrm{d}y$ (b) $(yz+y+z)\,\mathrm{d}x + (xz+x+z)\,\mathrm{d}y + (xy+x+y+2z)\,\mathrm{d}z$

5. Calcular $\displaystyle\int_{OA} \left[xy^4\,\mathrm{d}x + x^2y^3\,\mathrm{d}y\right]$ siendo $O(0,0)$, $A(1,1)$, a lo largo de los siguientes caminos:

   (a) quebradas de dos lados, paralelos a los ejes : (b) segmento OA. (c) $y^3 = x$.
   (i) con primer lado sobre el eje X.
   (ii) con primer lado sobre el eje Y.

   ¿Existe función potencial?.

6. Dada la integral: $\displaystyle\int_C \left[\left(6xy^3+5\right)\,\mathrm{d}x + \left(ax^2y^b\right)\,\mathrm{d}y + \left(6z^2\right)\,\mathrm{d}z\right]$:

   (a) Hallar el valor de a y b para que el integrando admita función potencial.

   (b) En ese caso, hallar la integral curvilinea entre los puntos $(0,1,1)$ y $\left(1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a lo largo de C.

7. Calcular la integral curvilínea $I = \displaystyle\oint_C \left(y\mathrm{e}^{xy}+x\right)\,\mathrm{d}x + \left(x\mathrm{e}^{xy}+3y\right)\,\mathrm{d}y$ siendo C la circunferencia de centro el punto $(2,6)$ y radio 7.

8. Calcular la integral curvilínea $I = \displaystyle\oint_C xy\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y$ a lo largo de la elipse de centro el origen y semiejes 1 y 2.

9. Calcular el trabajo realizado por una partícula sometida al campo de fuerzas $\vec{F}(x,y) = (xy, x)$ que se desplaza entre los puntos $A = (1,1)$ y $B = (2,4)$:

   (a) Por el segmento que los une.

   (b) Por la parábola $y = x^2$.

10. Calcular la integral curvilínea $I = \displaystyle\oint_C y^2\,\mathrm{d}x + \left(xy+x^2\right)\,\mathrm{d}y$ a lo largo del contorno cerrado en sentido positivo formado por una semicircunferencia de centro el origen y radio dos y su diámetro sobre el eje OX.

Problemas Propuestos

11. Calcular el potencial (si existe) de las siguientes formas diferenciales:

    (a) $(x+z)\,\mathrm{d}x - (y+z)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z$ (b) $y\,\mathrm{e}^{xy+z}\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{e}^{xy+z}\,\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{xy+z}\,\mathrm{d}z$

    (c) $\left(y\mathrm{e}^{xy}+x\right)\,\mathrm{d}x + \left(x\mathrm{e}^{xy}+3y\right)\,\mathrm{d}y$ (d) $\left(3x^2yz+x^2\right)\,\mathrm{d}x + x^3z\,\mathrm{d}y + x^3y\,\mathrm{d}z$

12. Siendo $A = \left(3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2\right)$, hallar $\displaystyle\int_C A\,\mathrm{d}r$ donde C es una trayectoria que va desde $(0,0,0)$ hasta $(1,1,1)$, en los siguientes casos:

   (a) la curva $x = t\ ;\ y^2 = t\ ;\ z^3 = t$.

   (b) la quebrada que une los puntos $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.

   (c) el segmento que une ambos puntos.

   (d) ¿Es $A\,dr$ exacta? ¿Por qué?

13. Sea la forma diferencial: $\left(\mathrm{e}^{x+y} + \cos(x-y)\right)\,\mathrm{d}x + \left(\mathrm{e}^{x+y} - a\cos(x-y) + 2\right)\,\mathrm{d}y$

   (a) Calcular a para que sea exacta. Hallar la función potencial.

   (b) Para dicho valor, calcular la integral curvilínea de la forma diferencial a lo largo de:

      i. cualquier curva que una los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

      ii. la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$ recorrida en sentido positivo.

14. Dada la forma diferencial $(x + ay + a)\,\mathrm{d}x + (2x + 4y - 1)\,\mathrm{d}y$:

   (a) Calcular el valor de la constante a para que sea forma diferencial exacta.

   (b) Para dicho valor calcular la integral de línea de la forma diferencial entre los puntos $(1,0)$ y (e,e) siguiendo la curva $y = x\ln x$.

15. Ejercicio 1.a-Septiembre 95. (Libro de exámenes resueltos)

16. Calcular el valor de a y b para que la integral $\displaystyle\int_C \left(2xyz^a + x^2\right)\mathrm{d}x + x^2z^3\,\mathrm{d}y + bx^2yz^2\,\mathrm{d}z$ sea independiente del camino. Para dichos valores, calcular la integral entre los puntos $A = \left(2, 0, \sqrt{11}\right)$ y $B = \left(1, \sqrt{7}, 0\right)$ a lo largo del segmento que une ambos puntos.

17. Calcular la integral curvilínea $I = \displaystyle\oint_C xy\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x^2}{2} + 3\right)\,\mathrm{d}y$ a lo largo de la elipse de centro el origen y semiejes 1 y 2.

18. Calcular la integral curvilínea $I = \displaystyle\oint_C xy\,\mathrm{d}x + (x+3)\,\mathrm{d}y$ a lo largo de la elipse de centro el origen y semiejes 1 y 2.

19. Calcular el valor de a para que la integral:

$$\int_C \left(3x^2 + 2y + \mathrm{e}^{x+y}(\cos x + \operatorname{sen} x)\right)\,\mathrm{d}x + \left(3y^2 + 2x + \mathrm{e}^{x+y}(\operatorname{sen} x + a\cos x)\right)\,\mathrm{d}y$$

   sea independiente del camino. Para dicho valor, calcular la integral entre los puntos $(0,0)$ y $(1,2)$ siguiendo el camino dado por $y = 2x^2$.

20. Determinar los valores de las constantes a y b para que la forma diferencial

$$axy\,\mathrm{d}x + \left(x^2 + z^b\right)\,\mathrm{d}y + byz^2\,\mathrm{d}z$$

   sea forma diferencial exacta.
   Para dichos valores calcular $\displaystyle\int_C axy\,\mathrm{d}x + \left(x^2 + z^b\right)\,\mathrm{d}y + byz^2\,\mathrm{d}z$ a través de:

   (a) El segmento que une los puntos $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$.

   (b) La quebrada de puntos $(0,0,0)$, $(1,2,0)$, $(1,2,2)$ y $(1,1,1)$.

   (c) El camino cerrado parametrizado por $\vec{\alpha}(t) = \left(\cos t, \operatorname{sen} t, t^2 - 2\pi t\right)$ $t \in [0, 2\pi]$.

21. Calcular la integral de línea $\oint_C x\,\mathrm{d}y$ siendo C la curva parametrizada por:

$$\begin{array}{rccc} \vec{\alpha}: & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longrightarrow & \left(\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t\right) \end{array}$$

22. (a) Calcular los valores de las constantes a y b para que la forma diferencial

$$\left(3x^a y^2 + y\right)\,\mathrm{d}x + \left(2x^3 y^b + x + 1\right)\,\mathrm{d}y$$

sea exacta. Hallar la función potencial para dichos valores.

(b) Calcular $\oint_{\mathcal{C}} \left(3x^2y^2 + y\right)\,\mathrm{d}x + \left(2x^3y^2 + x + 1\right)\,\mathrm{d}y$ siendo $\mathcal{C}$ la circunferencia centrada en el origen y de radio 1 recorrida en sentido positivo.

(c) Calcular $\int_{\mathcal{C}} \left(3x^2y^2 + y\right)\,\mathrm{d}x + \left(2x^3y + x + 1\right)\,\mathrm{d}y$ siendo $\mathcal{C}$:

i. La circunferencia centrada en el origen y de radio 1 recorrida en sentido positivo.

ii. El segmento que une el punto $(0,1)$ con el $(1,2)$.

23. Calcular $\int_C \left(3x^2 + 2x + y^2\right)\,\mathrm{d}x + \left(2xy + y^3\right)\,\mathrm{d}y$ donde C es:

(a) El camino que va desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$ siguiendo la curva dada por $y = \sqrt[6]{x}$.

(b) La circunferencia de centro $(3,-7)$ y radio 9.

Soluciones

11. (a) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} + (x-y)z$ (b) e^{xy+z} (c) $\mathrm{e}^{xy} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3y^2}{2}$ (d) $\dfrac{x^3}{3} + x^3yz$

12. (a) $\dfrac{37}{12}$ (b) $\dfrac{23}{3}$ (c) $\dfrac{13}{3}$ (d) No, ya que depende del camino elegido.

13. (a) $a = 1$. $U(x,y) = \mathrm{e}^{x+y} + \operatorname{sen}(x-y) + 2y$

(b) i. $\mathrm{e}^{x_2+y_2} + \operatorname{sen}(x_2 - y_2) + 2y_2 - \mathrm{e}^{x_1+y_1} - \operatorname{sen}(x_1 - y_1) - 2y_1$ ii. 0

14. (a) $a = 2$ (b) $\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^2 + \mathrm{e} - \dfrac{5}{2}$

16. $a = 3$, $b = 3$. $I = -\dfrac{7}{3}$

17. 0.

18. 2π.

19. $a = 0$. $I = 13 + \mathrm{e}^3 \operatorname{sen} 1$.

20. $a = 2$; $b = 3$ (a) 2 (b) 2 (c) 0

21. $\dfrac{3}{8}\pi$.

22. (a) $a = 2$; $b = 1$ (b) $\dfrac{\pi}{4}$ (c) (i) 0 (ii) 7

23. (a) $\dfrac{13}{4}$ (b) 0

Problemas de Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de ITT

Relación 2. Integrales múltiples. Teorema de Green-Riemann

1. Calcular $\displaystyle\iint_R (x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ siendo $R=[0,1]\times[0,2]$.

2. Dado el recinto $R=\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ y\ge 0 \end{cases}$

   (a) Calcular $\displaystyle\iint_R y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ utilizando coordenadas cartesianas.

   (b) Calcular su área utilizando coordenadas cartesianas.

   (c) Calcular $\displaystyle\iint_R y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ utilizando coordenadas polares.

   (d) Calcular su área utilizando coordenadas polares.

3. (a) Poner los límites de integración a $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ siendo R :

   i. Interior de la circunferencia: $x^2+y^2=4$.

   ii. Región comprendida por $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x^2+y^2=9 \\ y\ge 0 \end{cases}$

   iii. Recinto encerrado por $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

   iv. Porción del plano limitada por: $x^2+y^2-ax-2ay+a^2=0$.

   v. Region comprendida en: $y=x^2,\ x=y^2$.

   (b) Calcular el área de todos los recintos anteriores.

   (c) Calcular $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en todos los recintos anteriores siendo:

   (i) $f(x,y)=x$. (ii) $f(x,y)=y$. (iii) $f(x,y)=x+y$. (iv) $f(x,y)=xy$.

4. Calcular el área limitada por las curvas:

   (a) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$; $x+y=a$. (b) $x^2+y^2=2bx$, $x^2+y^2=2ax$, $y=x$, $y=0$.

5. Pasando a coordenadas polares calcular la integral $\displaystyle\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-y^2-x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

6. Calcular $\displaystyle\iiint_V xy\sqrt{10-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ siendo V el recinto limitado por los planos $x=1$, $x=3$, $y=0$, $y=2$, $z=-1$, $z=1$.

7. Calcular $\displaystyle\iiint_V \frac{xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ siendo V el recinto limitado por $x^2+y^2+z^2=a^2$ en el primer octante.

8. Calcular $\displaystyle\iiint_V (1+x+y+z)^{-3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ siendo V el recinto limitado por $x+y+z=1$ y los planos coordenados.

9. Calcular el volumen del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

10. Calcular $\displaystyle\iiint_V x^2yz^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ siendo V el recinto comprendido por $y=0,\quad y^2=x-x^2,\quad z=0,$ $z^2=4x.$

11. Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies:
   (a) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,$ en el primer octante.
   (b) El cilindro $x^2+y^2=2by$ y el cono $x^2+y^2=z^2.$

12. Calcular el volumen de intersección de las superficies $x^2+y^2=z^2$ y $6-z=x^2+y^2$ con $z\geq 0.$

13. Calcular $I=\displaystyle\oint_{\mathcal{C}}(x+y)^2\,\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$ siendo $\mathcal{C}$ el contorno, recorrido en sentido positivo, del triángulo $\triangle OAB$ donde: $O\equiv(0,0),\ A\equiv(1,0),\ B\equiv(0,1).$

14. Calcular, por medio de una integral de línea, el área encerrada por:
   (a) La circunferencia $x^2+y^2=r^2.$
   (b) La elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

15. Calcular por medio de una integral de línea, la integral doble $\displaystyle\iint_T\left(2x+y^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ siendo T el interior de la circunferencia $x^2+y^2=2ax.$

16. Sea $I=\displaystyle\oint_{\mathcal{C}}\mathrm{d}x+3x\,\mathrm{d}y$ siendo $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro el punto $(2,-7)$ y radio 11. Comprobar que se verifica el teorema de Green-Riemann.

17. Calcular $I=\displaystyle\oint_{\mathcal{C}}y^2\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$ siendo $\mathcal{C}$:
   (a) el cuadrado de vértices $(0,0)\,,\,(3,0)\,,\,(3,3)\,,\,(0,3).$
   (b) la circunferencia de radio 5 centrada en el origen.

18. Calcular el trabajo realizado por un punto material que se desplaza a lo largo de la mitad superior de la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ entre los puntos $A\equiv(a,0)$ y $B\equiv(-a,0)$ sujeto al campo de fuerzas $\vec{F}=y\,\vec{\imath}-x\,\vec{\jmath}.$

Problemas Propuestos

19. (a) Poner los límites de integración a $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ siendo R :
      i. Región comprendida por $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ x\leq 0 \\ y\geq 0\end{array}\right.$

ii. Interior de la circunferencia: $x^2 + y^2 + 4y - 2x = -1$.

iii. Región comprendida por $\begin{cases} x = 2 \\ y = x + 1 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

iv. Region comprendida en: $y = x^2,\ y = -x^2 + 2$.

(b) Calcular el área de todos los recintos anteriores.

(c) Calcular $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ en todos los recintos anteriores siendo:

(i) $f(x, y) = x$. (ii) $f(x, y) = y$. (iii) $f(x, y) = x + y$. (iv) $f(x, y) = xy$.

20. Calcular el área del recinto limitado por $x^2 + y^2 = 2ax\ ,\ y = x\ ,\ y = 0$.

21. Pasando a coordenadas polares calcular la integral $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$. Utilizar esto para demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

22. Calcular $\displaystyle\iiint_V (x + yz)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ siendo V el recinto limitado por los planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 1$, $z = 3$.

23. Calcular el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

24. Calcular el volumen del cuerpo limitado superiormente por la esfera centrada en el punto $(0, 0, a)$ y de radio a e inferiormente por el paraboloide $x^2 + y^2 = az$.

25. Ejercicio 1.b-Septiembre 95. (Libro de exámenes resueltos)

26. Ejercicio 1-Diciembre 94. (Libro de exámenes resueltos)

27. Poner los límites de integración en: $\displaystyle\iiint_V f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ siendo V el recinto comprendido entre $x^2 + y^2 = b^2$ y el plano $x + y + z = 2b$, con $z \geq 0$.

28. Calcular el volumen de la región sólida limitada inferiormente por el cono $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

29. Calcular el volumen del cuerpo limitado por el cilindro $x^2 + y^2 - bx = 0$ y el cono $x^2 - z^2 = -y^2$.

30. Ejercicio 1-Primer Parcial 95. (Libro de exámenes resueltos)

31. Ejercicio 2.c-Junio 95. (Libro de exámenes resueltos)

32. Ejercicio 1-Diciembre 95. (Libro de exámenes resueltos)

33. Calcular la circulación de $\vec{F} = \left(y - \operatorname{sen} x, x^2\right)$ a lo largo del triángulo de vértices $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ recorrido en sentido positivo:

(a) Directamente.

(b) Utilizando algún teorema.

34. Calcular, utilizando el teorema de Green-Riemann, la integral curvilínea $I = \oint_{\mathcal{C}} y^2 \, \mathrm{d}x + \left(xy + x^2\right) \, \mathrm{d}y$ a lo largo del contorno cerrado en sentido positivo formado por una semicircunferencia de centro el origen y radio dos y su diámetro sobre el eje OX.

35. Calcular $I = \oint_{\mathcal{C}} (\mathrm{e}^x + \cos x + 2y) \, \mathrm{d}x + \left(4x - \dfrac{y^2}{3}\right) \mathrm{d}y$ siendo $\mathcal{C}$:

(a) la elipse de centro el punto $(2, 3)$ y semiejes 2 y 7.

(b) la circunferencia de radio 5 centrada en el origen.

<u>**Soluciones**</u>

19. (a) i. En cartesianas $\begin{cases} -3 \le x \le 0 \\ 0 \le y \le \sqrt{9 - x^2} \end{cases}$ En polares $\begin{cases} 0 \le \rho \le 3 \\ \dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi \end{cases}$

ii. En cartesianas $\begin{cases} -1 \le x \le 3 \\ -2 - \sqrt{4 - (x-1)^2} \le y \le -2 + \sqrt{4 - (x-1)^2} \end{cases}$

Con el cambio $\begin{cases} x = 1 + \rho\cos\theta \\ y = -2 + \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le x + 1 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le -x^2 + 2 \end{cases}$

(b) i. $\dfrac{9}{4}\pi$ ii. 4π iii. 4 iv. $\dfrac{8}{3}$

(c) i. $-9, 4\pi$, $\dfrac{14}{3}$, 0 ii. $9, -8\pi$, $\dfrac{13}{3}$, $\dfrac{8}{3}$ iii. $0, -4\pi$, 9 , $\dfrac{8}{3}$ iv. $\dfrac{-81}{8}, -8\pi$, $\dfrac{17}{3}$, 0

20. $a^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\right)$ **21.** $\dfrac{\pi}{4}$ **22.** 8 **23.** $\dfrac{4}{3}\pi a^3$ **24.** $\dfrac{7}{6}a^3\pi$

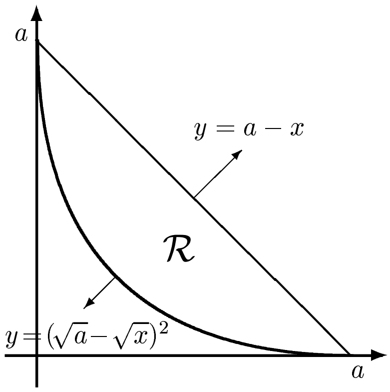
27. En cartesianas $\begin{cases} -b \le x \le b \\ -\sqrt{b^2 - x^2} \le y \le \sqrt{b^2 - x^2} \\ 0 \le z \le 2b - x - y \end{cases}$

En cilíndricas $\begin{cases} 0 \le \rho \le b \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le 2b - \rho\cos\theta - \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$

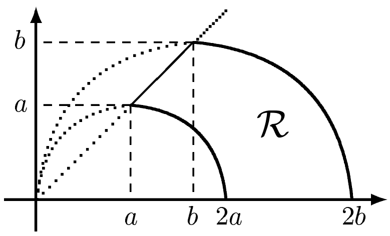
28. $9\pi\left(-\sqrt{2} + 2\right)$ **29.** $\dfrac{8}{9}b^3$ **33.** $\dfrac{2\pi^2 - 3\pi}{12}$ **34.** $\dfrac{-16}{3}$

35. (a) 28π (b) 50π

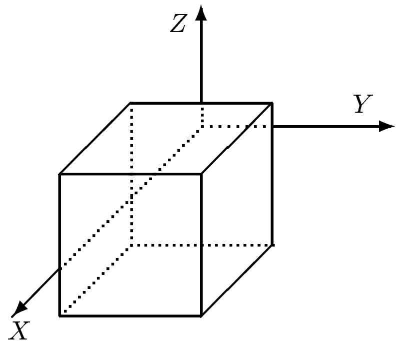
Recintos de los problemas resueltos



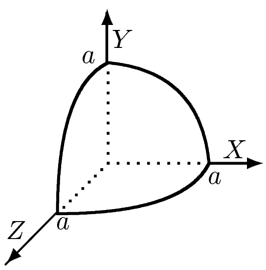
Ejercicio 4. (a)



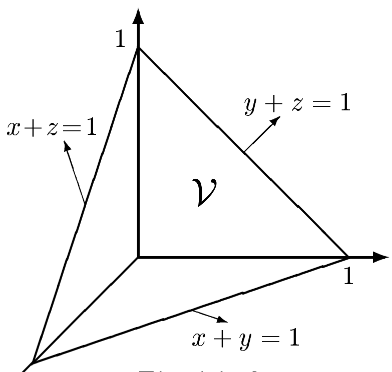
Ejercicio 4. (b)



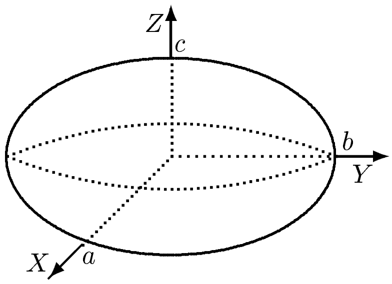
Ejercicio 6.



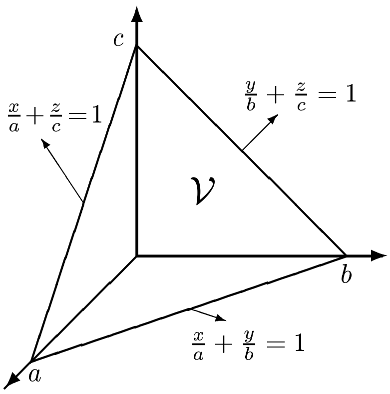
Ejercicio 7.



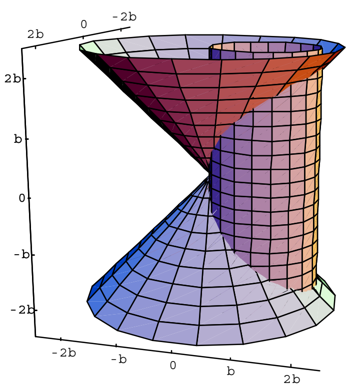
Ejercicio 8.



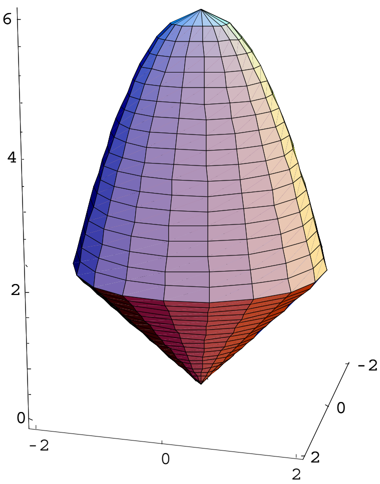
Ejercicio 9.



Ejercicio 11. (a)

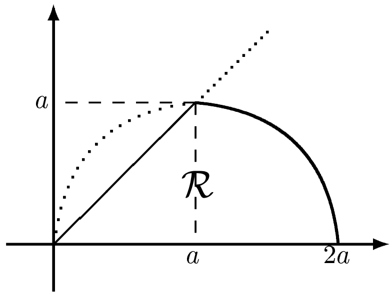


Ejercicio 11. (b)

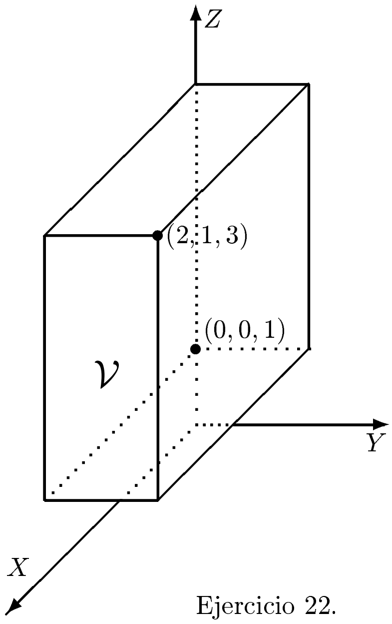


Ejercicio 12.

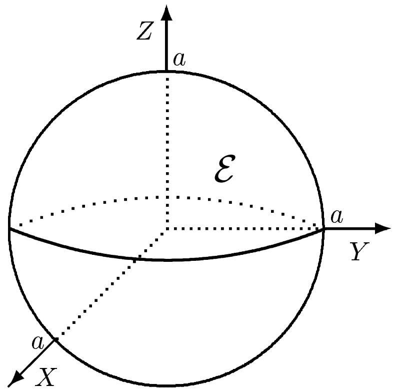
Recintos de los problemas propuestos



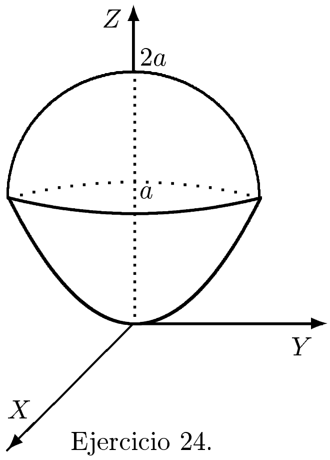
Ejercicio 20.



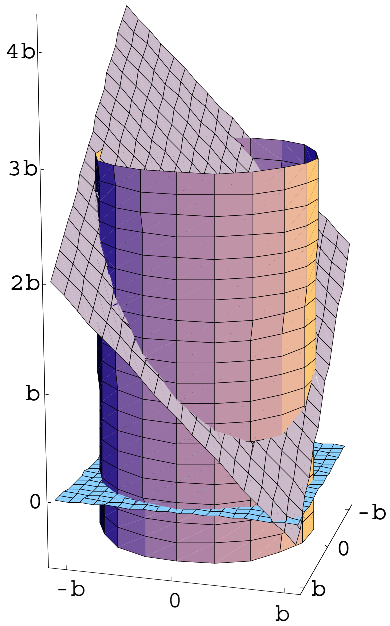
Ejercicio 22.



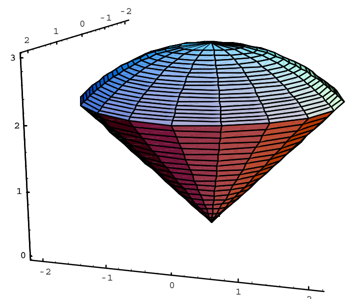
Ejercicio 23.



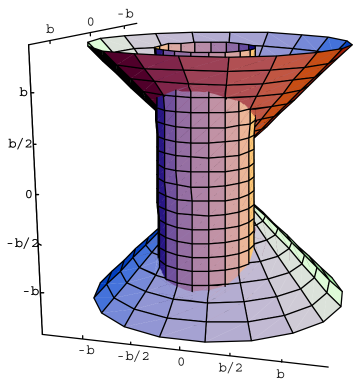
Ejercicio 24.



Ejercicio 27.



Ejercicio 28.



Ejercicio 29.

Problemas de Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de ITT

Relación 3. Integrales de Superficie. Teoremas de Stokes y Gauss

1. Calcular el área de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2. Calcular el área de:
   (a) la porción de cono $z^2 = x^2 + y^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 - ax = 0$ $(z \geq 0)$.
   (b) la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 - rx = 0$.
   (c) la porción del cilindro $x^2 + y^2 - rx = 0$ interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.
   (d) el sólido limitado por $y^2 + z^2 = 4(x + 9)$; $y^2 + z^2 = -6(x - 6)$.

3. Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (2z, x, y^2)$ a través de la superficie cerrada limitada por $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = 0$.
   (a) Directamente.
   (b) Aplicando algún teorema.

4. Calcular el flujo del vector $\vec{f} = (ax, by, cz)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ a través de una superficie $\mathcal{S}$ cerrada de volumen v.

5. (*) Calcular el flujo del rotacional del campo vectorial $\vec{f} = (y, z, x)$ a través de la superficie $z = 2(1 - x^2 - y^2)$ intersectada por el plano $z = 0$.

6. Calcular **por dos métodos diferentes**: $I = \iint_S (y^2 + x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z^2 + y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (x^2 + z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ siendo S la cara exterior de la superficie cerrada limitada por $z^2 = x^2 + y^2$ y $z = a$ con $z \geq 0$.

7. Hallar el flujo del vector $\vec{F} = (4x + 3z, -xz - y, y^2 + 3z)$ a través de la esfera de centro $(7, -1, 4)$ y radio 7.

8. Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie cerrada limitada por $x^2 + z^2 = y^2$ y $x^2 + z^2 + y = 6$, con $y \geq 0$.
   (a) Directamente.
   (b) Aplicando algún teorema.

9. Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 z + x, y, z)$ a través de la superficie cerrada limitada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $z = 0$, con $z \geq 0$.
   (a) Directamente.
   (b) Aplicando algún teorema.

Problemas Propuestos

10. Calcular el área de $z = x^2 + y^2$ interior a $z = 2 - x^2 - y^2$.

11. Calcular el área de la porción de $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ interior a $x^2 + y^2 = z^2$.

12. Calcular el área de la porción de $x^2 + y^2 = z^2$ interior a $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

13. Calcular el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ exterior al paraboloide $x^2 + y^2 + z = 16$.

14. Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \big(4xz, xyz^2, 3z\big)$ a través de la superficie cerrada limitada por $x^2+y^2=z^2$ y $z=4$ con $z \geq 0$.
    (a) Directamente.
    (b) Aplicando algún teorema.

15. Ejercicio 3-Primer Parcial 95. (Libro de exámenes resueltos)

16. Ejercicio 2-Diciembre 94. (Libro de exámenes resueltos)

17. Ejercicio 2-Primer Parcial 95. (Libro de exámenes resueltos)

18. Ejercicio 1-Junio 95. (Libro de exámenes resueltos)

19. Ejercicio 2.a-Septiembre 95. (Libro de exámenes resueltos)

20. Ejercicio 2-Diciembre 95. (Libro de exámenes resueltos)

21. Calcular **<u>por dos métodos diferentes</u>**: $I = \iint_S x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (x+y)(a-2z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ siendo S la cara exterior de la superficie $x^2+y^2+z^2=a^2$.

22. Calcular **<u>por dos métodos diferentes</u>**: $I = \iint_S 6x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 7z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 8y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ siendo S la superficie cerrada limitada por $z = 9 - x^2 - y^2$ y $z=5$.

23. (*) Calcular el flujo del rotacional del campo vectorial $\vec{f} = (y,z,x)$ a través de la parte superior de la superficie $x^2+y^2+z^2=1$ intersectada por el plano $z=0$.

24. Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (2x, -2y, z^2)$ a través del cubo acotado por los planos $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=a$, $z=0$, $z=a$.
    (a) Directamente.
    (b) Aplicando algún teorema.

25. Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la superficie cerrada limitada por el plano $x+y+z=5$ y los planos coordenados.
    (a) Directamente.
    (b) Aplicando algún teorema.

26. Calcular **<u>por dos métodos diferentes</u>**: $I = \iint_S \frac{x}{3}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \frac{z}{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ siendo S la cara exterior de la superficie cerrada limitada por $x^2+y^2=z$; $z=0$; $z=1$.

<u>Soluciones</u>

10. $\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$ **11.** $4\sqrt{2}\,\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$ **12.** $2\sqrt{2}\,\pi$

13. 8π **14.** 320π **21.** 0 **22.** 48π

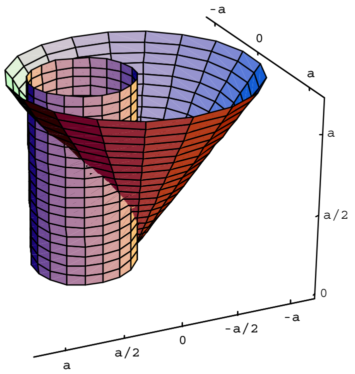
23. $-\pi$. Observar el resultado, repasar el ejercicio 5 e interpretarlo.

24. a^4 **25.** $\frac{125}{2}$ **26.** $\frac{\pi}{2}$

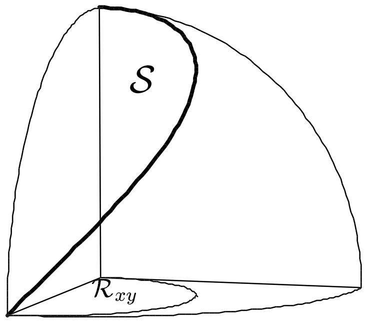
<u>Nota</u>:

Los problemas marcados con (*) corresponden al epígrafe *teorema de Stokes.*

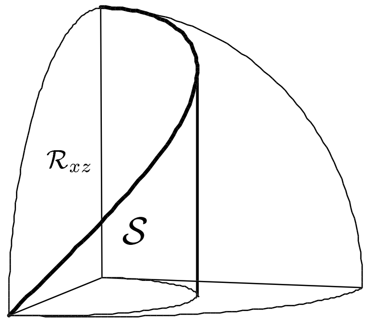
Recintos de los problemas de la relación 3



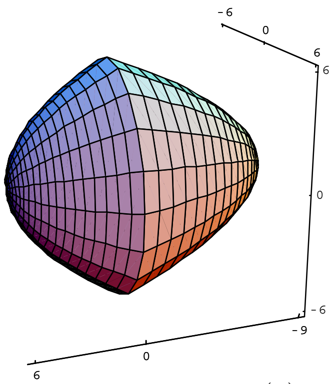
Ejercicio 2. (a)



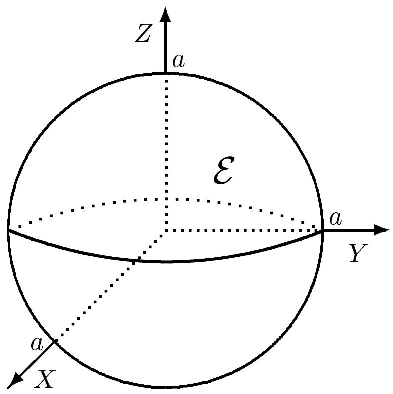
Ejercicio 2. (b)



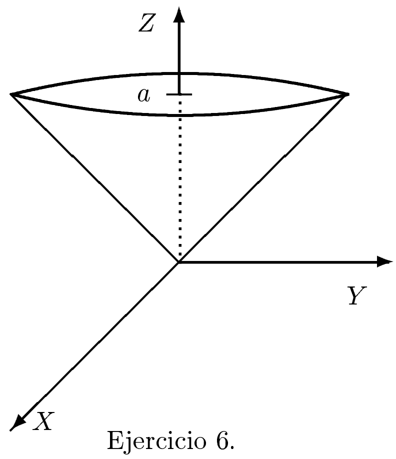
Ejercicio 2. (c)



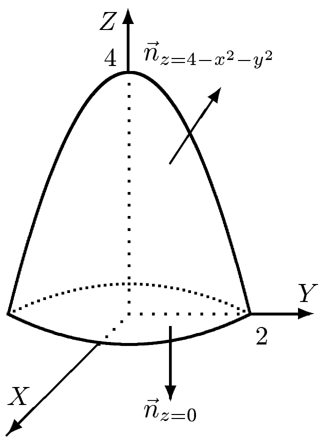
Ejercicio 2. (d)



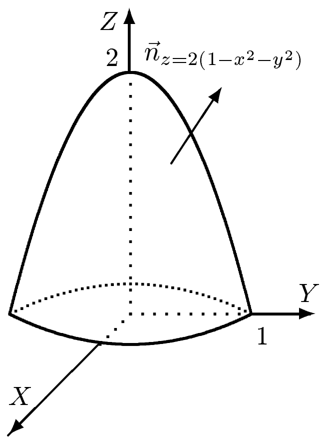
Ejercicios 1 y 21.



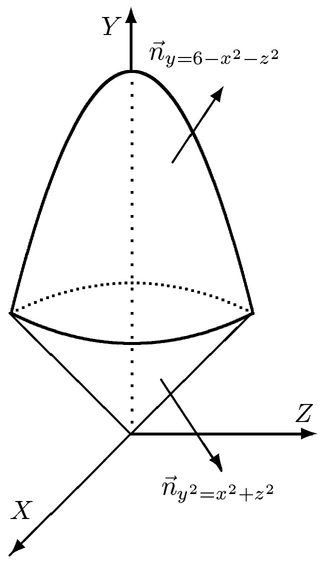
Ejercicio 6.



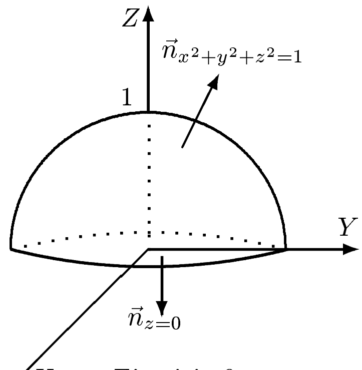
Ejercicio 3.



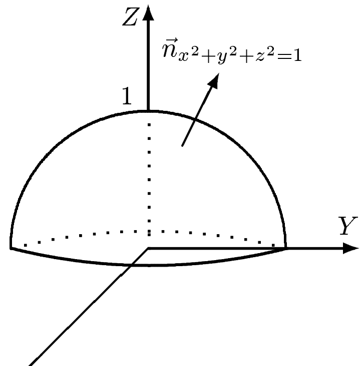
Ejercicio 5.



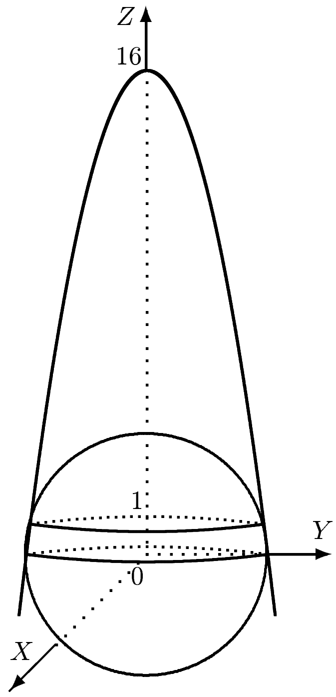
Ejercicio 8.



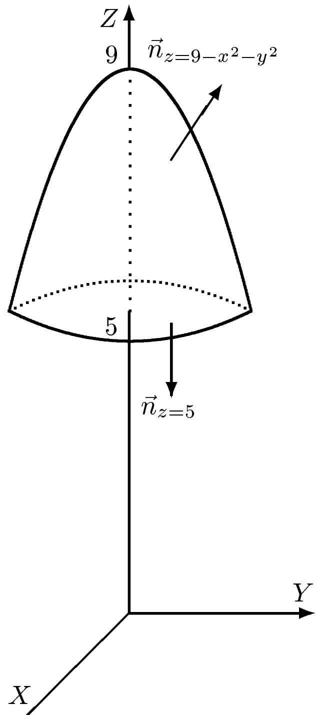
Ejercicio 9.



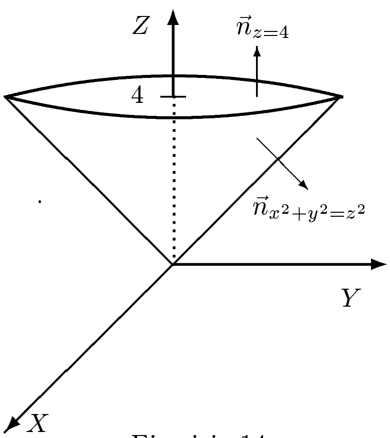
Ejercicio 23.



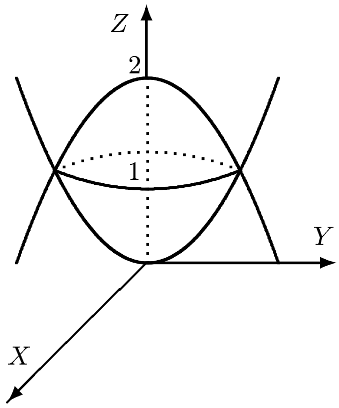
Ejercicio 13.



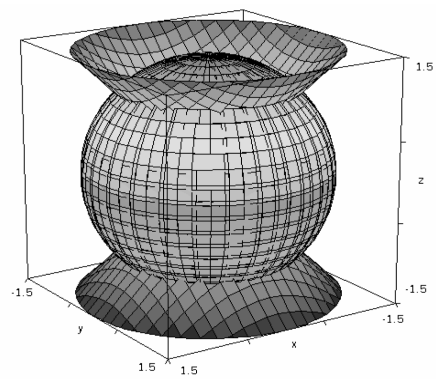
Ejercicio 22.



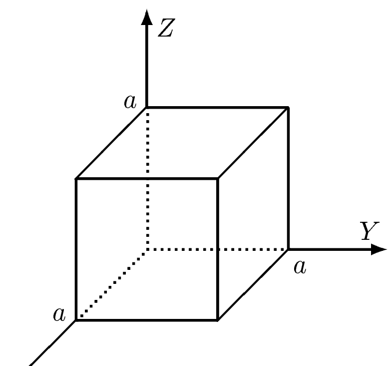
Ejercicio 14.



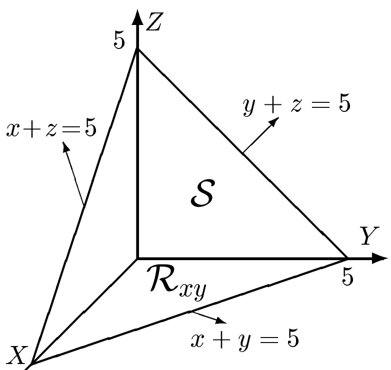
Ejercicio 10.



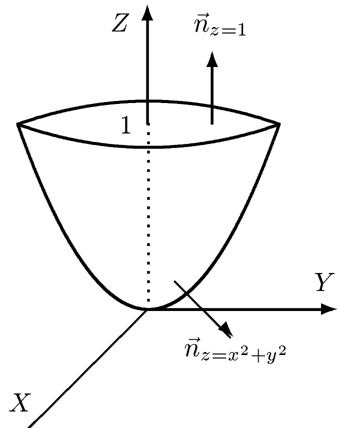
Ejercicios 11 y 12.



Ejercicio 24.



Ejercicio 25.



Ejercicio 26.

Problemas de Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de ITT

Relación 4. Transformadas de Laplace y de Fourier

1. Calcular $\mathcal{L}[F(t)]$, indicando en cada caso el rango para la variable s, siendo $F(t)$:

   (a) $F(t) = t^3 \mathrm{e}^{5t} + \mathrm{e}^{-2t} \cos(3t)$ (b) $F(t) = t(t-3)\mathrm{sen}(3t)$ (c) $F(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{at}}{\sqrt{t}}$

   (d) $F(t) = \mathrm{sen}^2(3t)$ (e) $F(t) = \displaystyle\int_0^t x\cos(ax)\,\mathrm{d}x$ (f) $F(t) = \begin{cases} 8 & \text{si} \quad 0 \le t < 2 \\ t & \text{si} \quad 2 \le t \end{cases}$

2. Calcular (si es posible) $\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t \frac{F(x)}{x}\mathrm{d}x\right]$ siendo $F(x)$:

   (a) $F(x) = \mathrm{sen}x$ (b) $F(x) = \mathrm{e}^x \mathrm{sen}x$ (c) $F(x) = \mathrm{senh}x$ (d) $F(x) = \cos x$

3. Calcular las integrales impropias $\displaystyle\int_0^\infty F(t)\,\mathrm{d}t$ siendo $F(t)$:

   (a) $F(t) = \dfrac{\cos(3t) - \cos(2t)}{t}$ (b) $F(t) = \mathrm{e}^{-t}\displaystyle\int_0^t \frac{\cos(3x) - \cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$

   (c) $F(t) = t^x \quad (x > -1)$ (d) $F(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$

4. (a) Sea $p(s)$ un polinomio de grado n en s. Demostrar que $p(s)$ no posee transformada inversa de Laplace.

   (b) Dar una condición suficiente para que una función $f(s)$ no posea transformada inversa de Laplace.

5. Calcular las transformadas inversas $\mathcal{L}^{-1}[f(s)]$ siendo $f(s)$:

   (a) $\dfrac{2s+3}{s^2+2}$ (b) $\dfrac{(\sqrt{s}-2)^2}{s^3}$ (c) $\dfrac{1}{(s+1)^2(s-2)}$ (d) $\dfrac{s}{(2s+3)^{\frac{3}{2}}}$ (e) $\dfrac{s}{s+2}$

   (f) $\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}$ (g) $\mathrm{e}^{-2s}\dfrac{1}{\sqrt{as+b}}$ (h) $\mathrm{arctg}\left(\dfrac{a}{s}\right)$ (i) $\mathrm{arctg}\left(1+\dfrac{\cos(s)}{s}\right)$ (j) $\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$

6. Calcular:

   (a) $\mathcal{F}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{i\,bt}}{a^2+t^2}\right] \quad a < 0$ (b) $\mathcal{F}\left[\dfrac{t}{(a^2+t^2)^2}\right] \quad a < 0$

   (c) $\mathcal{F}\left[\dfrac{\cos(bt)}{a^2+t^2}\right] \quad a < 0$, sabiendo que $\cos(bt) = \dfrac{\mathrm{e}^{i\,bt}+\mathrm{e}^{-i\,bt}}{2}$.

7. Calcular:

   (a) $\mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-3\,i\,s-2}\right]$ (b) $\mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{i\,s-s^2} + \dfrac{\mathrm{sen}(s)\,\cos(s)}{s}\right]$

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t \quad a < 0$

Problemas Propuestos

8. Calcular $\mathcal{L}[F(t)]$, indicando en cada caso el rango para la variable s, siendo $F(t)$:

   (a) $F(t) = 5t^2 + \mathrm{sen}(2t) - 3\cos t + 2\mathrm{e}^{3t}$ (b) $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t < a \\ k & \text{si} \quad a \leq t < b \\ \mathrm{e}^t & \text{si} \quad b \leq t \end{cases}$ (c) $F(t) = \cos^2(3t)$

   (d) $F(t) = t\cos(at)$ (e) $F(t) = t^2\cosh(6t)$

9. Calcular (si es posible) $\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{F(x)}{x}\mathrm{d}x\right]$ siendo $F(x)$:

   (a) $F(x) = 1 - \cos x$ (b) $F(x) = \cosh x$ (c) $F(x) = 1 - \cosh x$ (d) $F(x) = \cos^2 x$

10. Demostrar que $\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{\mathrm{e}^{ax} - \cos(bx)}{x}\mathrm{d}x\right] = \frac{\ln\frac{\sqrt{s^2+b^2}}{s-a}}{s}$

    Utilizar lo anterior para calcular $\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{\mathrm{sen}^2 x}{x}\mathrm{d}x\right]$

11. Calcular las integrales impropias $\int_0^\infty F(t)\,\mathrm{d}t$ siendo $F(t)$:

    (a) $F(t) = \frac{\mathrm{sen}t}{t}$ (b) $F(t) = t^n\mathrm{e}^{-t}$ (c) $F(t) = \mathrm{e}^{-t}\int_0^t \frac{\mathrm{sen}x}{x}\,\mathrm{d}x$

    (d) $F(t) = \mathrm{e}^{-t}\int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-3x} - \mathrm{e}^{-6x}}{x}\,\mathrm{d}x$ (e) $F(t) = \mathrm{e}^{-2t}\,\frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}$ (f) $F(t) = \mathrm{e}^{-t}\int_0^t \frac{1 - \cos x}{x}\,\mathrm{d}x$

    (g) $F(t) = \frac{\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-6t}}{t}$ (h) $F(t) = \mathrm{e}^{-t}\,\frac{\cos(3t) - \cos(2t)}{t}$

12. Calcular las transformadas inversas $\mathcal{L}^{-1}[f(s)]$ siendo $f(s)$:

    (a) $\frac{1}{s^2(s+1)^2}$ (b) $\frac{2s+3}{s^2+2s+7}$ (c) $\frac{s^4+2s^3+s^2-1}{s^3(s^3-s^2-s+1)}$

    (d) $\frac{s^2}{s+2}$ (e) $\frac{2s^3+3s^2+10s-3}{(s^2-2s+5)(s^2+4s+13)}$ (f) $\ln\left(\frac{s}{s-1}\right)$

    (g) $\frac{1}{s(s+1)}$ (h) $\frac{6\,\mathrm{e}^{-2s}}{s^2+2s+50}$

Los siguientes ejercicios son del libro de exámenes resueltos.

13. Ejercicio 3.c-Septiembre 95.
14. Ejercicio 5.a-Febrero 95.
15. Ejercicio 3.d-Junio 95.
16. Ejercicio 5.a-Diciembre 95.
17. Ejercicio 4.c-Diciembre 94.
18. Ejercicio 3.d-Septiembre 95.
19. Ejercicio 4.b-Diciembre 94.
20. Ejercicio 5.b-Febrero 95.
21. Ejercicio 5.b-Diciembre 95.
22. Ejercicio 3.c-Junio 95.
23. Ejercicio 4.a-Diciembre 94.
    (Recomendado sólo lectura)

24. Sabiendo que $\quad \operatorname{sen}(bt) = \dfrac{e^{i\,bt} - e^{-i\,bt}}{2\,i}, \quad$ calcular $\quad \mathcal{F}\left[\dfrac{\operatorname{sen}(bt)}{a^2+t^2}\right] \quad a<0.$

25. Calcular:

(a) $\mathcal{F}\left[e^{i\,bt-at^2}\right] \quad a>0$ (b) $\mathcal{F}\left[t\,e^{-at^2}\right] \quad a>0$ (c) $\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-s^2}+e^{-|s|}\right]$

(d) $\mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{1}{i\,s+1}\right]$ (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\,dt \quad a>0$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{a^2+t^2}\,dt \quad a<0$

26. (a) Calcular $\mathcal{F}\left[2\,e^{-t^2}\cos t\right]$ sabiendo que: $\begin{cases} \cos t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2} \\ \mathcal{F}\ \left[e^{i\alpha t}F(t)\right] = f(s-\alpha) \quad \alpha\in\mathbb{R} \\ \mathcal{F}\ \left[e^{-at^2}\right] = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{s^2}{4a}} \quad \text{con } a>0 \end{cases}$

(b) Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 2\,e^{-t^2}\cos t\,dt$

<u>Soluciones</u>

8. (a) $\dfrac{10}{s^3}+\dfrac{2}{s^2{+}4}-\dfrac{3s}{s^2{+}1}+\dfrac{2}{s{-}3} \quad s>3$ (b) $k\left[\dfrac{1}{s\,e^{as}}-\dfrac{1}{s\,e^{bs}}\right]+\dfrac{1}{(s{-}1)\,e^{b(s-1)}} \quad s>1$ (c) $\dfrac{1}{2s}+\dfrac{s}{2\,(s^2{+}36)} \quad s>0$
(d) $\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2} \quad s>0$ (e) $\dfrac{2s^3+216s}{(s^2-36)^3} \quad s>6$

9. (a) $\dfrac{\ln\left(\dfrac{\sqrt{s^2+1}}{s}\right)}{s}$ (b) No es posible calcularla (c) $\dfrac{\ln\left(\dfrac{\sqrt{s^2-1}}{s}\right)}{s}$ (d) No es posible calcularla

10. $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\ln\left(\dfrac{\sqrt{s^2+4}}{s}\right)}{s}$

11. (a) $\dfrac{\pi}{2}$ (b) $n!$ (c) $\dfrac{\pi}{4}$ (d) $\ln\left(\dfrac{7}{4}\right)$ (e) $\ln(2)$ (f) $\dfrac{1}{2}\ln(2)$ (g) $\ln(2)$ (h) $\ln\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

12. (a) $e^{-t}(t+2)+t-2$ (b) $e^{-t}\left[2\cos\left(\sqrt{6}t\right)+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{6}t\right)\right]$ (c) $-1-t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{3}{4}e^t+\dfrac{3}{2}t\,e^t+\dfrac{1}{4}e^{-t}$

(d) No existe (e) $e^t\cos(2t)+e^{-2t}\cos(3t)$ (f) $\dfrac{e^t-1}{t}$ (g) $1-e^{-t}$ (h) $\dfrac{6}{7}e^{-(t-2)}\operatorname{sen}(7t-14)$

24. $-\dfrac{\pi}{2a\,i}\left(e^{a|s-b|}-e^{a|s+b|}\right)$

25. (a) $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{(s-b)^2}{4a}}$ (b) $-\dfrac{i\,s}{2a}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{s^2}{4a}}$ (c) $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{4}}+\dfrac{1}{\pi(t^2+1)}$ (d) $-\dfrac{1}{2}\,e^{|t|}-e^{-t}\,\Pi_{[0,\infty]}(t)$

(e) $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$ (f) $-\dfrac{\pi}{2a}\left(1-e^{2a}\right)$

26. (a) $\sqrt{\pi}\left(e^{-\frac{(s-1)^2}{4}}+e^{-\frac{(s+1)^2}{4}}\right)$ (b) $\dfrac{2\sqrt{\pi}}{e^{1/4}}$

Problemas de Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de ITT

Relación 5. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

1. Calcular la integral general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

Variables separadas

(a) $x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y = 0$

Reducibles a separadas

(b) $(1+x^2)y' = 1+y^2$ (c) $y' = \mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)$ (d) $y' = (x+y+3)^2$

Homogénea

(e) $(x^2-y^2)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0$

Reducibles a Homogéneas

(f) $(2x+y+1)\,\mathrm{d}x + (x+2y-1)\,\mathrm{d}y = 0$ (g) $(x+y+2)\,\mathrm{d}x + (2x+2y-1)\,\mathrm{d}y = 0$

(h) $(x+y-1)^3\,\mathrm{d}x + (2x+2y-2)^3\,\mathrm{d}y = 0$

Exacta

(i) $(2x+y+1)\,\mathrm{d}x + (x+2y-1)\,\mathrm{d}y = 0$

Factores integrantes

(j) $\Big(x\,\mathrm{sen}(y) + y\cos(y)\Big)\,\mathrm{d}x = \Big(y\,\mathrm{sen}(y) - x\cos(y)\Big)\,\mathrm{d}y$ con $\mu = \mu(x)$

(k) $(5x^2-4xy-y)\,\mathrm{d}x + (3y-x^2-2x)\,\mathrm{d}y = 0$ con $\mu = \mu(x^2-y)$

Lineales

(l) $y' + 2y = \mathrm{e}^{2x}$ (m) $y' + \dfrac{y}{x} = 1$

Bernouille

(n) $y' - \dfrac{y}{x} = -y^2$

Riccati

(o) $y' + y^2 + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x^2}$ con $y_p = -\dfrac{1}{x}$

(p) $y' + y^2 + x^2 = 1 + 2xy$, sabiendo que tiene una solución particular polinómica de grado 1

Primer orden y grado n respecto a y'

(q) $(*)$ $(y')^2 - (x+y)y' + xy = 0$ con $y(0) = 1$ (r) $(*)$ $(y')^3 - x\,(y')^2 - y^2y' + xy^2 = 0$

2. Resolver los siguientes problemas de Cauchy:

(a) $y' + \dfrac{y}{x} = 1$; $y(2) = 3$ (b) $y' + \dfrac{3x}{x^2+1}y = \dfrac{6x}{x^2+1}$; $y(0) = 1$

(c) $(x^2-y^2)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0$; $y(0) = 0$ (d) $(x^2-y^2)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0$; $y(1) = 1$

(e) $(x^2-y^2)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0$; $y(0) = 1$ (f) $(x+y-1)^3\,\mathrm{d}x + (2x+2y-2)^3\,\mathrm{d}y = 0$; $y(0) = 1$

3. Resolver, utilizando transformadas de Laplace, los siguientes problemas de Cauchy:

(a) $y' + 2y = \mathrm{e}^{2x}; \quad y(0) = 1$ (b) $y' + y = \cos(2x); \quad y(0) = 0$

4. (**) Calcular las trayectorias ortogonales a las familias de curvas siguientes:

(a) $y = x + a$ (b) $x^2 + y^2 = a^2$ (c) $y = ax$

5. (***) Si la población de un país se duplica en 50 años, ¿en cuántos años será el triple suponiendo que la velocidad de aumento sea proporcional al número de habitantes?

6. (***) En cierto cultivo de bacterias la velocidad de aumento es proporcional al número presente. Si hay 10^4 al cabo de 3 horas y $4 \cdot 10^4$ al cabo de 5 horas, ¿cuántas habría en un principio?

7. (***) Según la ley de Newton de enfriamiento, la velocidad a que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del aire. Si la temperatura del aire es 30º y la sustancia se enfría de 100º a 70º en 15 minutos, ¿cuándo será 40º la temperatura de la sustancia?

Problemas Propuestos

8. Calcular la integral general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $(1 + x^2)\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = 0$ (b) $y' - y = \mathrm{e}^x$

(c) $(x - y - 1)\,\mathrm{d}x + (4y + x - 1)\,\mathrm{d}y = 0$ (d) $3y' = (1 - 2x)y^4 - y$

(e) $y' = (x - y + 5)^4$ (f) $(x + y - 1)\,\mathrm{d}x + (2x + 2y - 3)\,\mathrm{d}y = 0$

(g) $y' - y = \cos x$ (h) $y' - y = \cos x + \mathrm{e}^x$

(i) $(x - y - 1)\,\mathrm{d}x + (2x - 2y - 2)\,\mathrm{d}y = 0$ (j) $(x + y)\,\mathrm{d}x + (y - x)\,\mathrm{d}y = 0$

(k) $(x + y - 1)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^y + x)\,\mathrm{d}y = 0$ (l) $(*)$ $(y')^2 + 2(y - x)y' - 4xy = 0$

9. Resolver los siguientes problemas de Cauchy:

(a) $y^2y' + 2y^3 = \mathrm{e}^{2x}; \quad y(0) = 1$ (b) $y' = \dfrac{3}{2x}y + \dfrac{2x}{y}; \quad y(1) = 0$

(c) $(x^2 - y)\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y; \quad y(0) = 0$ (d) $y' = \dfrac{3}{2x}y + \dfrac{2x}{y}; \quad y(0) = 0$

(e) $y' = \dfrac{y}{x} + x^3y^2 - x^5; \quad y_p = x; \quad y(1) = 1$ (f) $y' = \dfrac{3}{2x}y + \dfrac{2x}{y}; \quad y(0) = 1$

10. Resolver, utilizando transformadas de Laplace, los siguientes problemas de Cauchy:

(a) $y' + y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}; \quad y(0) = 0$ (b) $y' + 3y = \mathrm{sen}(2x); \quad y(0) = 0$

11. Ejercicio 4.a-Primer Parcial 95. (Libro de exámenes resueltos)

12. Ejercicio 2.b-Septiembre 95. (Libro de exámenes resueltos)

13. (*) Ejercicio 4.b-Primer Parcial 95. (Libro de exámenes resueltos)

14. Calcular la integral general de la siguiente ecuación diferencial:
$(4xy + 4xy^2)\,\mathrm{d}x = -(3x^2 + 4x^2y)\,\mathrm{d}y$, sabiendo que admite un factor integrante $\mu = \mu(xy)$.

15. (**) Ejercicio 2.b-Junio 95. (Libro de exámenes resueltos)

16. (**) Ejercicio 2.c-Septiembre 95. (Libro de exámenes resueltos)

17. (**) Calcular las trayectorias ortogonales a la familia $y = x^2 + ax + 1$. (Indicación: buscar un factor integrante dependiente de y para resolver la ecuación diferencial resultante).

18. (***) En cierto cultivo de bacterias la velocidad de aumento es proporcional al número presente. Si se ha hallado que el número se duplica en 4 horas, ¿que número se debe esperar al cabo de 12 horas?

19. (***) En un cultivo de levadura la cantidad de fermento activo crece a una velocidad proporcional a la cantidad presente. Si se duplica la cantidad en una hora, ¿cuántas veces puede esperarse que se tenga la cantidad original al cabo de 3 horas menos cuarto?

20. (***) Si, cuando la temperatura del aire es 20ºC, se enfría una sustancia desde 100º hasta 60º en 10 minutos, hallar la temperatura después de 40 minutos. (Indicación: ver la ley de Newton de enfriamiento en los problemas resueltos).

Soluciones

8. (a) $y = C\mathrm{e}^{-\mathrm{arctg}x}$. (Reducible a separadas).
   (b) $y = x\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x$. (Lineal).
   (c) $\ln\sqrt{(x-1)^2 + 4y^2} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{2y}{x-1}\right) = C$. (Reducible a homogénea).
   (d) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{C\mathrm{e}^x - (2x+1)}}$. (Bernouille).
   (e) $x + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-y+4}{x-y+6}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(x-y+5) = C$. (Reducible a separadas).
   (f) $x + 2y + \ln(2-x-y) = C$. (Reducible a homogénea).
   (g) $y = C\mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{sen}x - \cos x}{2}$. (Lineal).
   (h) Por los apartados b) y g): $y = C\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{sen}x - \cos x}{2}$. (Lineal).
   (i) Solución singular: $y = x - 1$; solución general: $y = \frac{C-x}{2}$. (Reducible a homogénea).
   (j) $\ln\sqrt{x^2+y^2} - \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = C$. (Homogénea).
   (k) $\frac{x^2}{2} + xy - x + \mathrm{e}^y = C$. (Exacta).
   (l) Dos soluciones: $y = x^2 + C_1$ e $y = C_2\mathrm{e}^{-2x}$. (Primer orden y grado n respecto a y').

9. (a) $y^3 = \frac{5}{8}\mathrm{e}^{-6x} + \frac{3}{8}\mathrm{e}^{2x}$. (Bernouille).
   (b) Dos soluciones: $y = \sqrt{4x^3 - 4x^2}$ e $y = -\sqrt{4x^3 - 4x^2}$. Obsérvese que por el teorema de existencia y unicidad, sólo podremos asegurar la existencia y la unicidad de la solución si $x \neq 0$ e $y \neq 0$. (Bernouille).
   (c) $y = \frac{x^2}{3}$. (Exacta).
   (d) En este caso hay infinitas soluciones: $y = \pm\sqrt{Cx^3 - 4x^2}$. (Bernouille).
   (e) $y = x$. (Observaciones: La solución general no verifica la condición inicial para ningún valor de la constante arbitraria, mientras que la solución singular si la verifica. Una forma más rápida de solucionar el ejercicio sin necesidad de resolver la ecuación diferencial es utilizar el siguiente razonamiento: por el teorema de existencia y unicidad, este problema tiene solución única; como $y_p = x$ verifica la condición inicial, la solución del problema es $y = x$). (Riccati).
   (f) En este caso no existe solución. (Bernouille).

10. (a) $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}$.

    (b) $y=-\dfrac{2}{13}\cos(2x)+\dfrac{3}{13}\operatorname{sen}(2x)+\dfrac{2}{13}\mathrm{e}^{-3x}$.

14. $x^4y^3+x^4y^4=C$.

17. $\mathrm{e}^{2y}\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y}{2}-\dfrac{3}{4}\right)=C$.

18. 8 veces las del principio.

19. Aproximadamente 6.727 veces la cantidad inicial.

20. 25º.

Nota:

Los problemas marcados con (*) corresponden al epígrafe *ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y grado n respecto a y'.*

Los problemas marcados con (**) corresponden al epígrafe *cálculo de trayectorias ortogonales.*

Los problemas marcados con (***) corresponden al epígrafe *aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.*

Problemas de Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales de ITT

Relación 6. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden Superior

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales reduciendo previamente su orden.

(a) $y''' = \mathrm{e}^{3x} + 2\cos x$ (b) $y'' + \dfrac{y'}{x} = 0$ (c) $\left[yy'' - (y')^2\right]x^2 + 2y^2 = 0$

2. Resolver los siguientes problemas de Cauchy.

(a) $\begin{cases} y''' = \mathrm{e}^{3x} + 2\cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' + \dfrac{y'}{x} = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \left[yy'' - (y')^2\right]x^2 + 2y^2 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \left[yy'' - (y')^2\right]x^2 + 2y^2 = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

3. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

(a) $y'' - 2y' = 3y$ (b) $y'' + y = -2y'$ (c) $y'' + y' + y = 0$

(d) $y^{IV} - 5y'' = 36y$ (e) $y^V = y'$ (f) $y^{VI} - 2y^V + 3y^{IV} + 3y'' - 2y' + y = 4y'''$

4. Dados los conjuntos de funciones siguientes:

(i) $\left\{x\mathrm{e}^{3x}, \mathrm{e}^{3x}, \mathrm{e}^{3x}\cos(-3x)\right\}$ (ii) $\left\{x^7, x^2\mathrm{e}^x, 0\right\}$

(iii) $\left\{x^3\cos(2x), x\mathrm{sen}x\cos x\right\}$ (iv) $\left\{x^2\mathrm{e}^{3x}, \mathrm{e}^{-x}, -x\mathrm{e}^x\cos(-2x)\right\}$

(a) ¿Cuál es el orden mínimo de una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes que tenga, entre otras, como soluciones particulares los conjuntos anteriores?.

(b) Construir dichas ecuaciones diferenciales de orden mínimo.

(c) Dar un conjunto fundamental de soluciones en cada caso.

(d) Resolver las ecuaciones diferenciales resultantes.

5. Resolver los siguientes problemas de Cauchy utilizando transformadas cuando las condiciones iniciales vengan dadas en 0:

(a) $\begin{cases} y'' - 2y' = 3y \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = \mathrm{e}^3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' + y = -2y' \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = \mathrm{e}^{-1} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' + 2y = 3y' \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2\mathrm{e}^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = -2 \end{cases}$

6. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando el *método de Lagrange* (*variación de las constantes*) para la solución particular:

(a) $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{x^2}$ (b) $y''' + y' = \cos x$

7. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando el *método operacional* para la solución particular:

(a) $y'' + 4y = \mathrm{e}^{2x}$ (b) $y'' - 4y' + 4y = 6x^2\mathrm{e}^{2x}$ (c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2\mathrm{e}^{x}$

(d) $y^{IV} - y = \mathrm{e}^{x}$ (e) $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{x^2}$ (f) $y'' + y = x^2 - x + 2$

(g) $y'' + 2y' + 2y = x^2\mathrm{e}^{-x}$ (h) $y^{IV} - y = 3\cos(2x)$ (i) $y'' + 9y = \mathrm{sen}x - 2\cos x$

(j) $y''' - y = \mathrm{sen}x$ (k) $y'' + y = \cos x$ (l) $y''' + y' = \cos x$

8. (*) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Euler:

(a) $(2x+3)^3y'' + 2(2x+3)^2y' - 4(2x+3)y = (2x+3)^2$ (b) $x^4y''' + x^2y' - xy = x^2 + 1 + x\ln x$

9. (**) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales utilizando transformadas cuando las condiciones iniciales vengan dadas en 0:

(a) $\begin{cases} y' + 2z' = x \\ y'' - 2z = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' + y = \mathrm{e}^{t} \\ x + y' = \mathrm{e}^{-t} \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x'' - 4x - 15y = 1 \\ y'' + x + 4y = 0 \\ x(0) = 1\ ;\ x'(0) = 0 \\ y(0) = 1\ ;\ y'(0) = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x' + y = \mathrm{e}^{t} \\ x + y' = \mathrm{e}^{-t} \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Problemas Propuestos

10. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales reduciendo previamente su orden.

(a) $y'' = \mathrm{sen}(2x) + \mathrm{e}^{-2x}$ (b) $y'' = (y')^2$ (c) $y'' + 2y' = \mathrm{e}^{2x}$

(d) $y^{IV} = x - \mathrm{e}^{x}$ (e) $\left[yy'' - (y')^2\right]x^2 + y^2 = 0$ (f) $y'' - y' = \cos x$

11. Resolver los siguientes problemas de Cauchy.

(a) $\begin{cases} y'' = \mathrm{sen}(2x) + \mathrm{e}^{-2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' = (y')^2 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y^{IV} = x - \mathrm{e}^{x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = -1 \\ y'''(0) = -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y'' + 2y' = \mathrm{e}^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} \left[yy'' - (y')^2\right]x^2 + y^2 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \left[yy'' - (y')^2\right]x^2 + y^2 = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

12. Ejercicio 3.b-Febrero 95. (Libro de exámenes resueltos)

13. Ejercicio 4.a.ii-Junio 95. (Libro de exámenes resueltos)

14. Ejercicio 4.a-Diciembre 95. (Libro de exámenes resueltos)

15. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

(a) $\pi y'' = \mathrm{e}y$ (b) $y'' - y' = -y$ (c) $y'' + 2y = 3y'$ (d) $y^{IV} - 11y''' + 41y'' + 30y = 61y'$

(e) $y^{IV} = y$ (f) $\pi y'' = -\mathrm{e}y$ (g) $y^{IV} + 8y'' = -16y$ (h) $y^{VI} + 2y^{IV} + y'' = 0$

16. Dados los conjuntos de funciones siguientes:

(i) $\{e^x, -xe^{-x}, 0\}$ (ii) $\{x\cos x, xe^{3x}, e^{3x}, -\operatorname{sen} x\}$ (iii) $\{x, x^2e^x, -x^2\}$

(iv) $\{2e^x, -e^{-x}, \cos x, -\operatorname{sen} x\}$ (v) $\{x^3, e^x\cos(-2x), xe^x\operatorname{sen}(2x)\}$ (vi) $\{xe^{2x}, 0, x\operatorname{sen}(3x)\}$

(a) ¿Cuál es el orden mínimo de una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes que tenga, entre otras, como soluciones particulares los conjuntos anteriores?.

(b) Construir dichas ecuaciones diferenciales de orden mínimo.

(c) Dar un conjunto fundamental de soluciones en cada caso.

(d) Resolver las ecuaciones diferenciales resultantes.

17. Ejercicio 4.a-Febrero 95. (Libro de exámenes resueltos)

18. Ejercicio 4.b-Junio 95. (Libro de exámenes resueltos)

19. Resolver los siguientes problemas de Cauchy utilizando transformadas cuando las condiciones iniciales vengan dadas en 0:

(a) $\begin{cases} y'' + 2y' = -y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' + 2y = 3y' \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y'' = y \\ y(1) = e \\ y'(1) = 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} y^{IV} - 11y''' + 41y'' + 30y = 61y' \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = xe^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

20. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando el método que se crea más conveniente para el cálculo de la solución particular:

(a) $y''' + y' = x^3$ (b) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$

(c) $y^{IV} - y = \cos x - e^x$ (d) $y^{VI} - y'' = \cos(3x) + e^x - e^{2x}$

(e) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$ (f) $y''' - y'' - y' + y = 7$

(g) $y'' + y = x^2 + 13e^{5x}$ (h) $y'' + y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

21. Ejercicio 4.a.i-Junio 95. Leer el *método de coeficientes indeterminados* para el cálculo de la solución particular. (Libro de exámenes resueltos)

22. Ejercicio 4.b-Diciembre 95. (Libro de exámenes resueltos)

23. (*) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Euler:

(a) $x^2y'' - 3xy' + 4y = x + x^2\ln x$

(b) $(x+1)^3y''' + 3(x+1)^2y'' + (x+1)y' = [\ln(x+1)]^2$

(c) $(x+2)^3y''' + (x+2)^2y'' + (x+2)y' - y = 0$

24. (*) Ejercicio 3.b-Septiembre 95. (Libro de exámenes resueltos)

25. (**) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales utilizando transformadas cuando las condiciones iniciales vengan dadas en 0:

(a) $\left\{ \begin{array}{l} x' + 2x + 3y = 0 \\ 3x + y' + 2y = 2\mathrm{e}^{2t} \end{array} \right.$ (b) $\left\{ \begin{array}{l} x'' - 2x - 3y = \mathrm{e}^{2t} \\ y'' + x + 2y = 0 \\ x(0) = 1\ ,\ x'(0) = 0 \\ y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0 \end{array} \right.$

(c) $\left\{ \begin{array}{l} y' - z' - 2y + 2z = \mathrm{sen} x \\ y'' + 2z' + y = 0 \\ y(0) = y'(0) = z(0) = 0 \end{array} \right.$ (d) $\left\{ \begin{array}{l} x'' - 2x - 3y = \mathrm{e}^{2t} \\ y'' + x + 2y = 0 \\ x(0) = 1\ ,\ x'(0) = 0 \\ y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0 \end{array} \right.$

26. (**) Ejercicio 3-Diciembre 94. (Libro de exámenes resueltos)

Soluciones

10. (a) $y = -\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,(2x) + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + C_1 x + C_2$ (b) $y = C_2 - \ln(x + C_1)$ (c) $y = -\frac{1}{2}C_1\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} + C_2$
(d) $y = \frac{x^5}{120} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 - \mathrm{e}^x$ (e) $y = C_2 x\mathrm{e}^{C_1 x}$ (f) $y = C_1\mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{sen}\,x + \cos x}{2} + C_2$

11. (a) $y = -\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,(2x) + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + x - \frac{1}{4}$ (b) $y = 2 - \ln(x+1)$ (c) $y = \frac{x^5}{120} - \mathrm{e}^x + 1$
(d) $y = -\frac{3}{8}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{4}$ (e) No tiene solución (f) Infinitas soluciones $y = x\mathrm{e}^{C_1x}$

15. (a) $y = C_1\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{\pi}}x} + C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{\pi}}x}$
(b) $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$
(c) $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}$
(d) $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} + C_3\mathrm{e}^{3x} + C_4\mathrm{e}^{5x}$
(e) $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3\cos x + C_4\mathrm{sen} x$
(f) $y = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{\pi}}\,x\right) + C_2\ \mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{\pi}}\,x\right)$
(g) $y = (C_1x + C_2)\cos(2x) + (C_3x + C_4)\mathrm{sen}(2x)$
(h) $y = C_1x + C_2 + (C_3x + C_4)\cos x + (C_5x + C_6)\mathrm{sen} x$

16. (i) (a) orden 3 (b) $y''' + y'' - y' - y = 0$

(c) $\{\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{-x}, x\mathrm{e}^{-x}\}$ (d) $y = C_1\mathrm{e}^x + (C_2x + C_3)\mathrm{e}^{-x}$

(ii) (a) orden 6 (b) $y^{VI} - 6y^V + 11y^{IV} - 12y''' + 19y'' - 6y' + 9y = 0$

(c) $\{\mathrm{e}^{3x}, x\mathrm{e}^{3x}, \cos x, x\cos x, \mathrm{sen} x, x\mathrm{sen} x\}$

(d) $y = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2x\mathrm{e}^{3x} + (C_3x + C_4)\cos x + (C_5x + C_6)\mathrm{sen} x$

(iii) (a) orden 6 (b) $y^{VI} - 3y^V + 3y^{IV} - y''' = 0$

(c) $\{1, x, x^2, \mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^x, x^2\mathrm{e}^x\}$

(d) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + (C_4 + C_5x + C_6x^2)\mathrm{e}^x$

(iv) (a) orden 4 (b) $y^{IV} - y = 0$

(c) $\{\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{-x}, \cos x, \operatorname{sen} x\}$ (d) $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3\cos x + C_4\operatorname{sen} x$

(v) (a) orden 8 (b) $y^{VIII} - 4y^{VII} + 14y^{VI} - 20y^{V} + 25y^{IV} = 0$

(c) $\{1, x, x^2, x^3, \mathrm{e}^x\cos(2x), x\mathrm{e}^x\cos(2x), \mathrm{e}^x\operatorname{sen}(2x), x\mathrm{e}^x\operatorname{sen}(2x)\}$

(d) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + \mathrm{e}^x\left((C_5x + C_6)\cos(2x) + (C_7x + C_8)\operatorname{sen}(2x)\right)$

(vi) (a) orden 6 (b) $y^{VI} - 4y^{V} + 22y^{IV} - 72y''' + 153y'' - 324y' + 324y = 0$

(c) $\{\mathrm{e}^{2x}, x\mathrm{e}^{2x}, \cos(3x), x\cos(3x), \operatorname{sen}(3x), x\operatorname{sen}(3x)\}$

(d) $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{2x} + (C_3x + C_4)\cos(3x) + (C_5x + C_6)\operatorname{sen}(3x)$

19. (a) $y = x\mathrm{e}^{-x}$ (b) $y = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x$ (c) $y = \operatorname{sen} x$ (d) $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^{2-x}}{2}$

(e) $y = 0$ (f) $y = \mathrm{e}^{-x}\left(1 + 3x + \dfrac{x^3}{6}\right)$

20. (a) $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\operatorname{sen} x + \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 6$

(b) $y = \left(C_1 + C_2x + \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{3}{4}x^2\right)\mathrm{e}^{-2x}$

(c) $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3\cos x + C_4\operatorname{sen} x - \dfrac{x\operatorname{sen} x}{4} - \dfrac{x\mathrm{e}^x}{4}$

(d) $y = C_1 + C_2x + C_3\mathrm{e}^x + C_4\mathrm{e}^{-x} + C_5\cos x + C_6\operatorname{sen} x - \dfrac{\cos(3x)}{720} + \dfrac{x\mathrm{e}^x}{4} - \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{60}$

(e) $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + (\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x})\ln(\mathrm{e}^x + 1) - \mathrm{e}^{-x}$

(f) $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + (C_2 + C_3x)\mathrm{e}^x + 7$

(g) $y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x + x^2 - 2 + \dfrac{\mathrm{e}^{5x}}{2}$

(h) $y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x - x\cos x + \operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x)$

23. (a) $y = (C_1 + C_2\ln x)x^2 + x + \dfrac{x^2(\ln x)^3}{6}$

(b) $y = C_1 + C_2\ln(x+1) + C_3\ln^2(x+1) + \dfrac{\ln^5(x+1)}{60}$

(c) $y = C_1(x+2) + \sqrt{x+2}\left[C_2\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln(x+2)\right) + C_3\operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln(x+2)\right)\right]$

25. (a) $\left\{\begin{array}{l} x = A\mathrm{e}^{t} + B\mathrm{e}^{-5t} - \dfrac{6}{7}\mathrm{e}^{2t} \\[2ex] y = \dfrac{8}{7}\mathrm{e}^{2t} - A\mathrm{e}^{t} + B\mathrm{e}^{-5t} \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{7}{4}\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{t} + \dfrac{2}{5}\mathrm{e}^{2t} - \dfrac{19}{10}\cos t + \dfrac{1}{5}\mathrm{sen} t \\[2ex] y = -\dfrac{7}{12}\mathrm{e}^{-t} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{t} - \dfrac{1}{15}\mathrm{e}^{2t} + \dfrac{19}{10}\cos t - \dfrac{1}{5}\mathrm{sen} t \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{9}\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{3}x\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{4}{45}\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{5}\cos x - \dfrac{2}{5}\mathrm{sen} x \\[2ex] z = \dfrac{1}{9}\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{3}x\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{1}{9}\mathrm{e}^{2x} \end{array}\right.$

(d) $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{7}{4}\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{t} + \dfrac{2}{5}\mathrm{e}^{2t} - \dfrac{19}{10}\cos t + \dfrac{1}{5}\mathrm{sen} t \\[2ex] y = -\dfrac{7}{12}\mathrm{e}^{-t} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{t} - \dfrac{1}{15}\mathrm{e}^{2t} + \dfrac{19}{10}\cos t - \dfrac{1}{5}\mathrm{sen} t \end{array}\right.$

<u>Nota</u>:

Los problemas marcados con (*) corresponden al epígrafe *ecuaciones diferenciales de Euler*.

Los problemas marcados con (**) corresponden al epígrafe *sistemas de ecuaciones diferenciales*.